Die quadratische Funktion

Eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ heißt quadratische Funktion.

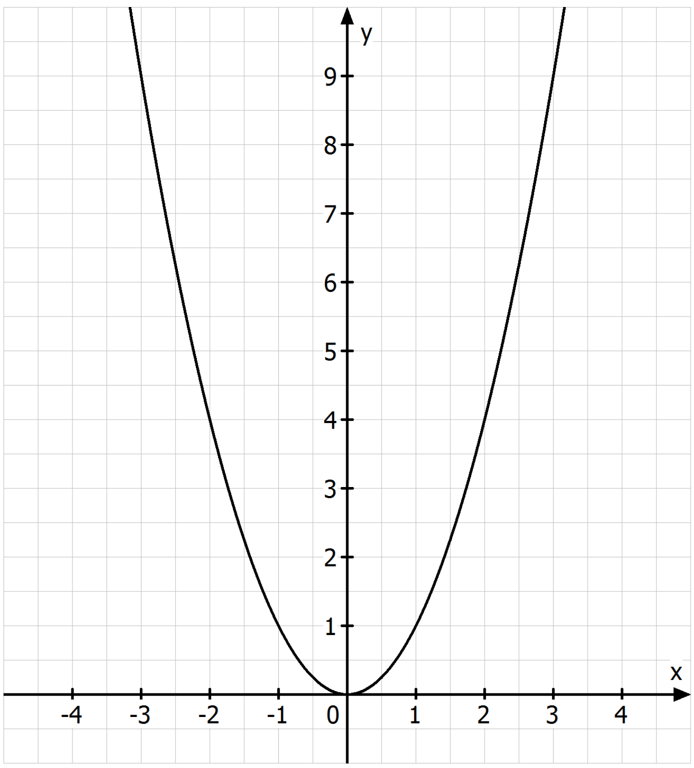
Der Graph dieser Funktion ist eine Parabel.

(1) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graph:



Den Graph der Funktion $y = x^2$ nennt man auch Normalparabel.

Eigenschaften der Funktion $y = x^2$:

a) Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$ Wertemenge: $W = \mathbb{R}_0^+$

b) Die y-Achse ist Symmetrieachse (Gleichung der Symmetrieachse: x = 0).

c) Der Scheitel ist der tiefste Kurvenpunkt (Koordinaten des Scheitels (0|0)).

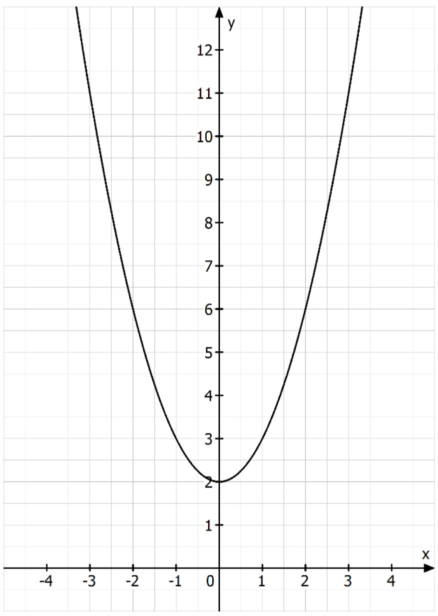
(2) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + t$ $(t \in \mathbb{R})$

Beispiel: $y = x^2 + 2$

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11

Graph:



Der Graph von $y = x^2 + t$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um t in y-Richtung (t > 0: nach oben; t < 0: nach unten).

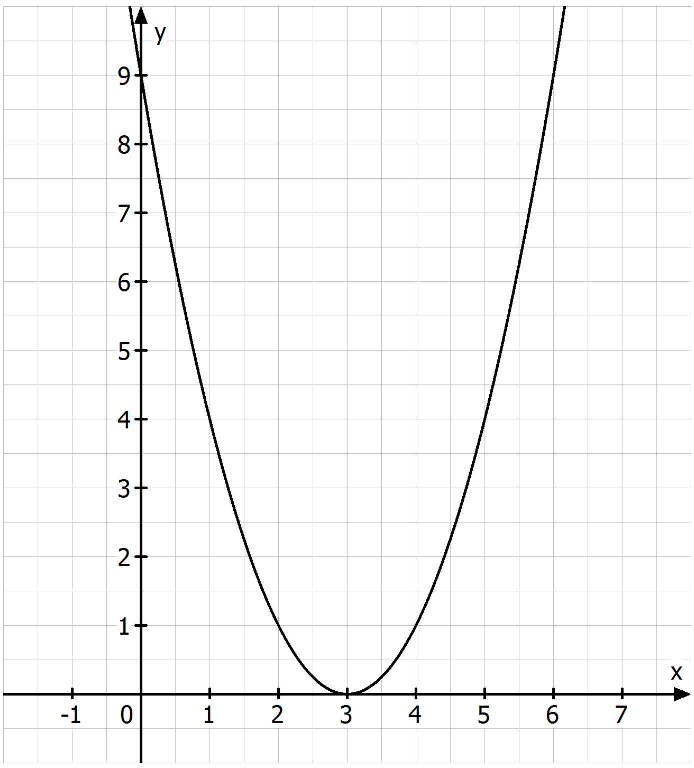
(3) Die Funktion mit der Gleichung $y = (x - s)^2$

Beispiel: $y = (x - 3)^2$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	9	4	1	0	1	4	9

Graph:



Der Graph von $y = (x - s)^2$ entsteht aus der Normalparabel durch Verschiebung um s in x-Richtung ($s > 0$: nach rechts; $s < 0$: nach links).

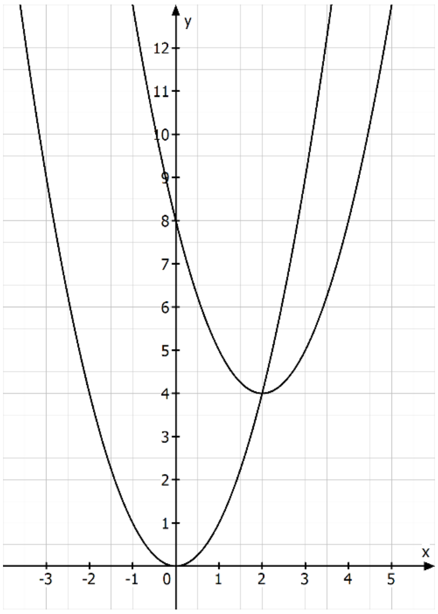
(4) Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2 + px + q$

Beispiel: $y = x^2 - 4x + 8$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	13	8	5	4	5	8	13

Graph:



Der Graph von $y = x^2 + px + q$ entsteht aus der Normalparabel durch eine Verschiebung in x- und y-Richtung.

Im Beispiel:

Normalparabel: $y = x^2$

Verschiebung um 2 in x-Richtung: $y = (x-2)^2$

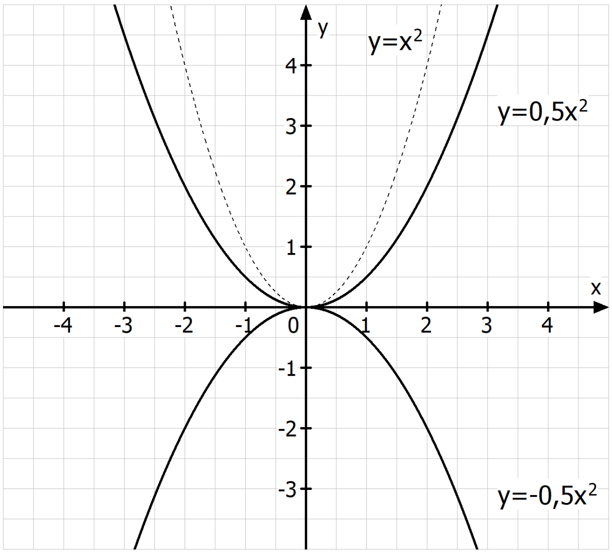
Verschiebung um 4 in y-Richtung: $y = (x-2)^2 + 4$

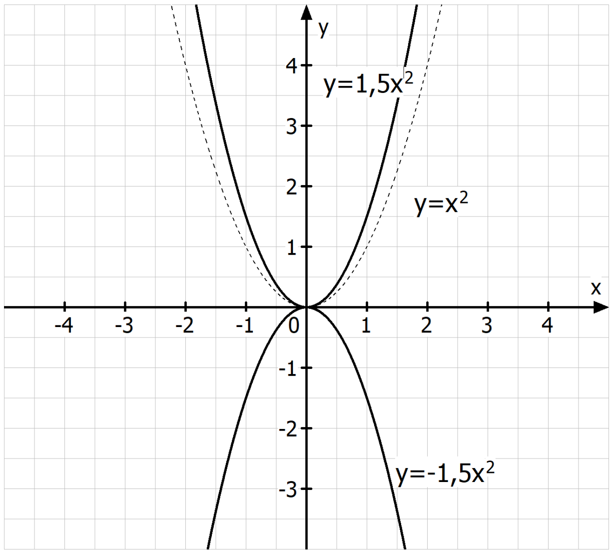
$$y = (x-2)^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + 4 = x^2 - 4x + 8$$

Die Gleichung $y = (x - 2)^2 + 4$ enthält die Koordinaten des Scheitels S(2/4) und heißt daher Scheitelgleichung.

(5) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2$

Beispiele: $y = \pm 0{,}5x^2$ $\qquad$ $y = \pm 1{,}5x^2$





Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2$ sind Parabeln mit dem Scheitel S(0/0). Ihre Form wird durch die Variable a festgelegt.

$a > 1$: Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestreckt

$0 < a < 1$: Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestaucht

$-1 < a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestaucht

$a < -1$: Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestreckt

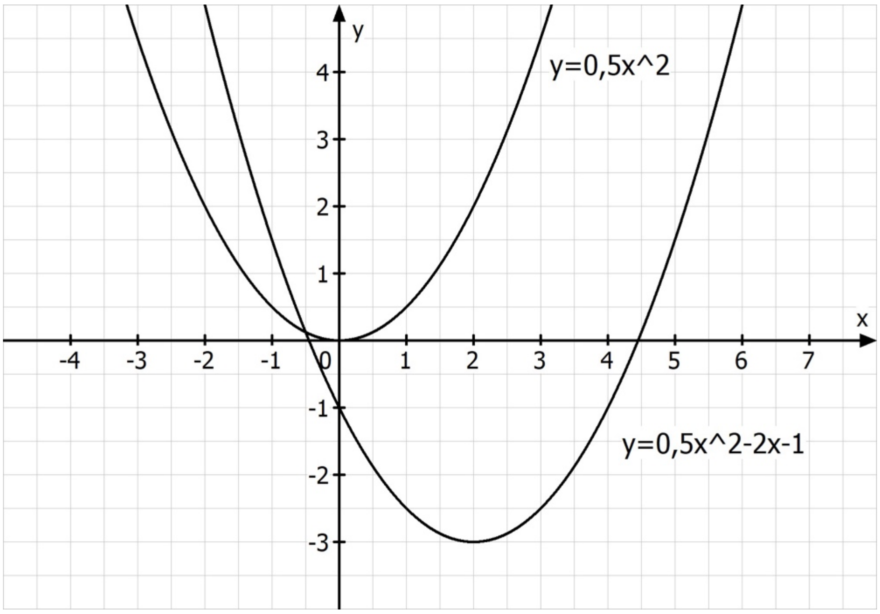
(6) Die Funktion mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$

Beispiel: $y = 0{,}5x^2 - 2x - 1$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5

Graph:



Die Graphen der Funktionen mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ sind Parabeln, die durch Parallelverschiebung aus den gestreckten oder gestauchten Normalparabeln mit der Gleichung $y = ax^2$ hervorgehen.

In der obigen Abbildung ist die Parabel mit der Gleichung $y = 0{,}5x^2 - 2x - 1$ durch eine Verschiebung der Parabel mit der Gleichung $y = 0{,}5x^2$ um zwei nach rechts und drei nach unten entstanden.

Der Scheitelpunkt einer Parabel hat eine große Bedeutung für die Parabel. Die Koordinaten des Scheitelpunktes können wie folgt bestimmt werden:

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

y_S wird am sinnvollsten ermittelt, indem man x_S in den Parabelterm einsetzt.

Damit lässt sich die allgemeine Form einer Parabel p ganz einfach in der Scheitelpunktform darstellen:

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

Bestimmung der Koordinaten des Scheitels und der Scheitelgleichung im konkreten Beispiel:

$$p(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1$$

$$a = 0{,}5 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

$$x_S = -\frac{-2}{2 \cdot 0{,}5} = 2 \qquad y_S = 0{,}5 \cdot \left(2\right)^2 - 2 \cdot 2 - 1 = -3$$

$$\Rightarrow S\left(2 \mid -3\right)$$

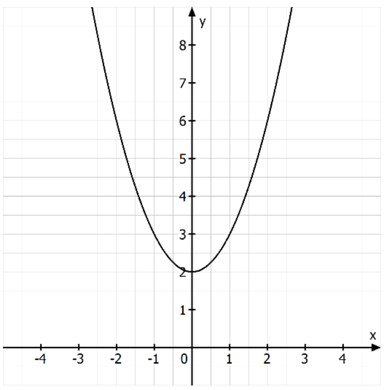
$$\text{Scheitelgleichung:} \quad p(x) = 0{,}5 \cdot \left(x - 2\right)^2 - 3$$

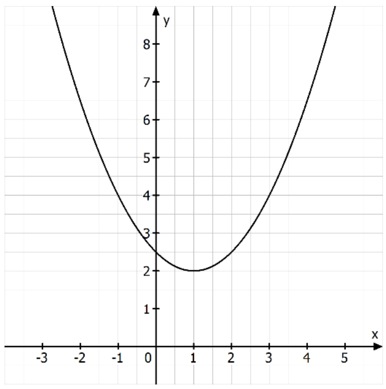
Für die folgenden Aufgaben kann als Hilfe bzw. Kontrolle gerne die Geogebra Datei „Eingabe allgemeine quadratische Funktion“ (https://www.geogebra.org/m/bxnk5pxe)verwendet werden.

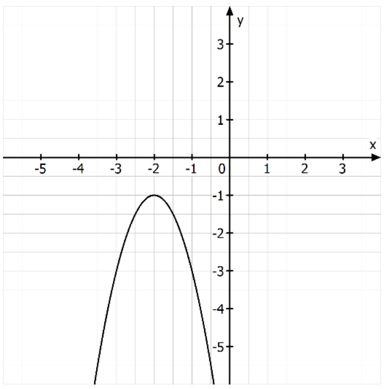
1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = 2x^2 + 8x + 8$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

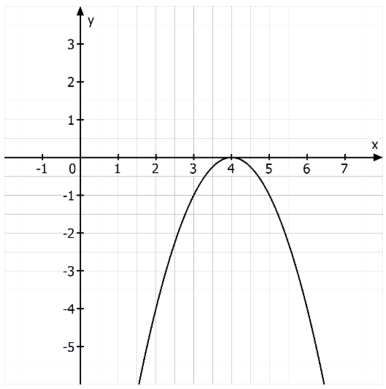
2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = -x^2 - 4x - 5$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

3 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der Scheitelpunktform an.









 Jochen Weber

4.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt.

4.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt $a \leq 1$.

4.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

4.3 Aus $c = 0$ folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

4.4 Aus $a < -1$ folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

4.5 Für $c > 0$ verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

5.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor a und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an.

5.1 $a = 1$; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

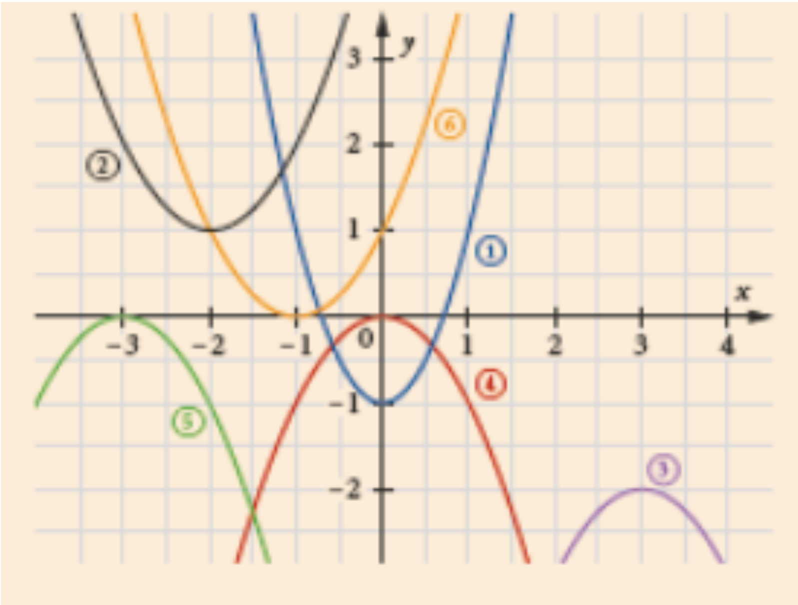
5.2 $a = -2$; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

5.3 $a = -\frac{1}{6}$; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

6 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu.

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$ c) $f(x) = -(x+3)^2$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e) $f(x) = -\left(x-3\right)^2 - 2$ f) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



7 Lösen Sie mindestens fünf neue Aufgaben in der Geogebra Datei

„Übung zur allgemeinen quadratischen Funktion“.

(https://www.geogebra.org/classic/fkp6w6mq)

Lösungen zu den Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = 2x^2 + 8x + 8$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_s = -\frac{8}{2\cdot 2} = -2$$

$$y_s = 2\cdot(-2)^2 + 8\cdot(-2) + 8 = 0$$

$$\text{Wertemenge: } W = \left[0;\infty\right[$$

$$\text{Scheitelpunktform: } y = 2(x+2)^2 + 0 \quad \Rightarrow y = 2(x+2)^2$$

$$\text{Symmetrieachse: } \quad x = -2$$

2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels, die Gleichung der Symmetrieachse sowie die Wertemenge der Parabel p mit der Gleichung $y = -x^2 - 4x – 5$ und geben Sie auch die Scheitelpunktform der Parabel p an.

$$x_s = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow x_s = -\frac{-4}{2\cdot(-1)} = -2$$

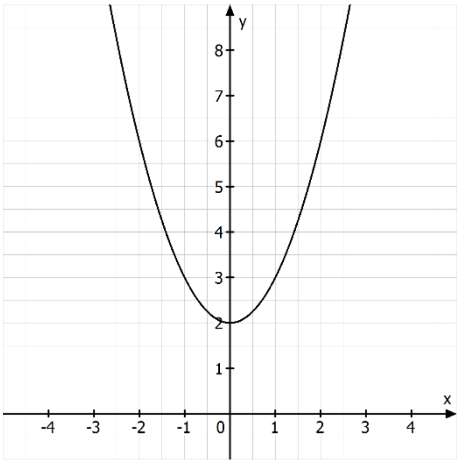
$$y_s = -(-2)^2 - 4\cdot(-2) - 5 = -1$$

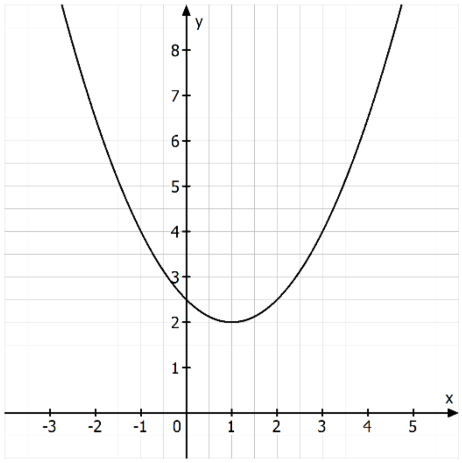
$$\text{Wertemenge: } W = \left]-\infty;-1\right]$$

$$\text{Scheitelgleichung: } y = -(x+2)^2 - 1$$

$$\text{Symmetrieachse: } \quad x = -2$$

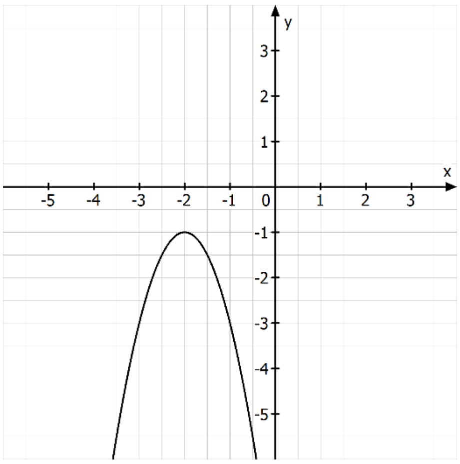
3 Geben Sie die Funktionsgleichungen der abgebildeten Graphen in der Scheitelpunktform an.

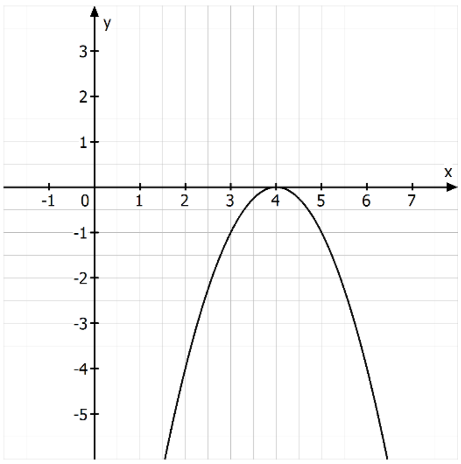




$y = x^2 + 2$

$y = 0{,}5 \cdot (x-1)^2 + 2$





$-2 \cdot (x+2)^2 - 1$

$y = -(x-4)^2$

4.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt.

4.1 Wenn eine Parabel gestaucht ist, gilt $a \leq 1$.

Falsch, für $a = -2$ ist es eine gestreckte Parabel.

4.2 Wenn die Koordinaten des Scheitelpunkts gleich sind, ist die Parabel nach rechts verschoben.

Falsch, wenn S(-1/-1) ist, dann ist die Parabel nach links verschoben.

4.3 Aus $c = 0$ folgt, dass die Parabel keinen Schnittpunkt mit der y-Achse hat.

Falsch, für $c = 0$ verlaufen die Parabeln durch den Ursprung.

4.4 Aus $a < -1$ folgt, dass die Parabel gestreckt ist.

Richtig.

4.5 Für $c > 0$ verläuft die Parabel nur im I. und II. Quadranten.

Falsch, Parabel mit $y = x^2 - 8x + 11$ verläuft auch unterhalb der x-Achse.

5.0 Von einer Parabel sind jeweils der Streckfaktor a und die Verschiebung parallel zu den Koordinatenachsen bekannt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform an.

5.1 a = 1; Verschiebung um 4 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach unten;

$$y=(x-4)^2-2$$

5.2 a = -2; Verschiebung um 4,5 Einheiten nach oben;

$$y=-2x^2+4{,}5$$

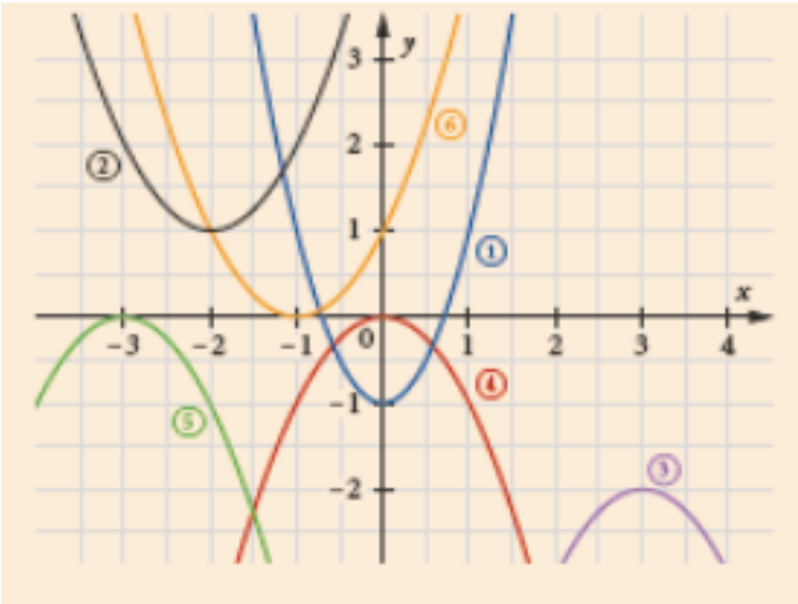
5.3 $a=-\frac{1}{6}$; Verschiebung um 3 Einheiten nach links;

$$y=-\frac{1}{6}(x+3)^2$$

6 Ordnen Sie die Graphen und Gleichungen einander zu.

a) $f(x) = -x^2$ b) $f(x) = 2x^2 - 1$ c) $f(x) = -(x+3)^2$

d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e) $f(x) = -\left(x-3\right)^2 - 2$ f) $f(x) = x^2 + 4x + 5$



6a) 4 6b) 1 6c) 5 6d) 6 6e) 3 6f) 2

7 Lösen Sie mindestens fünf neue Aufgaben in der Geogebra Datei

„Übung zur allgemeinen quadratischen Funktion“.

(https://www.geogebra.org/classic/fkp6w6mq)